曲線上の強変化相互作用に従う 2 次元 Schrödinger 作用素の固有値の漸近分布

首都大学東京大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻
学修番号 17878325　古川 裕也

2019 年 1 月 10 日 提出

1　主結果および背景

まず主結果を述べ，次に背景について述べる．

$\Gamma : [0, L] \ni s \mapsto (\Gamma_1(s), \Gamma_2(s)) \in \mathbb{R}^2$ を C^4 級単純閉曲線で，弧長でパラメータ付けされているものとし，$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}$ を Γ の曲率とする：$\gamma(s) = \Gamma_1''(s)\Gamma_2'(s) - \Gamma_1'(s)\Gamma_2''(s)$. $1 < p < \infty$ として実数値関数 $\omega \in L^p((0, L))$ を取る．$\beta > 0$ に対して $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の 2 次形式 $q_{\omega,\beta}$ を

$$q_{\omega,\beta}[f] = \|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \int_0^L (\beta + \omega(s))|f(\Gamma(s))|^2\, ds, \quad Q(q_{\omega,\beta}) = H^1(\mathbb{R}^2) \tag{1.1}$$

と定める．$q_{\omega,\beta}$ は下に有界かつ閉であるから，2 次形式の表現定理 ([1, 4.6.8 Theorem]) よりこの 2 次形式は一意的な自己共役作用素を定める．これを $H_{\omega,\beta}$ で表そう．$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) = [0, \infty)$ が成り立つ．集合 A に対し，A の濃度を $\#A$ で表す．$N(\beta) = \#\sigma_{\mathrm{d}}(H_{\omega,\beta})$ と定める． 本論文の主結果は次の定理である．

Theorem 1.1. $N(\beta)$ は次の漸近展開を持つ：

$$N(\beta) = \frac{L\beta}{2\pi} + o(\beta) \quad \text{as} \quad \beta \to \infty. \tag{1.2}$$

次に本研究の背景について説明する．本研究は S. Kondej の論文 [6] に強く影響を受けている．以下で S. Kondej の結果について述べ，本研究の着想に至った経緯について述べる．$H_{\omega,\beta}$ を上と同じとする．ω が**連続関数**という仮定のもとで，彼女は次の結果を「証

明」した；

$$N(\beta)=\frac{L\beta}{2\pi}+\mathcal{O}(\log\beta)\quad\text{as}\quad\beta\to\infty. \tag{1.3}$$

この等式は各固有値の漸近挙動に対する結果 [6, (2.5) 式] より導かれている．しかしながら，[6] の論法には本質的な不備が見られる．これについて説明するために，ここでは論文 [6] と同じ記号を用いる．[6] の 7 頁 (093511-7) の下から 2 行目で

$$|k(s)-k|=\mathcal{O}(\alpha^{-2}) \tag{1.4}$$

が主張されているが，これは誤りである．実際，$d=d_\alpha=6\alpha^{-1}\log\alpha$ より $\xi=\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ (as $\alpha\to\infty$) となるから，

$$k=\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{\alpha^2}\xi}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}\xi+\mathcal{O}(\alpha^{-5}).$$

また，$\xi(s)=\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ ([6, (3.14) 式]) より

$$\begin{aligned}k(s)&=\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha\omega(s)+\omega(s)^2}{4}+\xi(s)}\\&=\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\alpha^{-1}\omega(s)+\alpha^{-2}\omega(s)^2+\frac{4}{\alpha^2}\xi(s)}\\&=\frac{\alpha}{2}\{1+\alpha^{-1}\omega(s)+\mathcal{O}(\alpha^{-2})\}\end{aligned}$$

となり，$|k(s)-k|$ の評価は $\mathcal{O}(1)$ が最良となる．よって，(1.4) は成立しない．評価 (1.4) は [6] の主結果の 1 つである [6, (2.5) 式] の証明に本質的に効いているため，この結果が正しいかどうかは不透明である．従って [6] における評価 (1.3) の証明は不十分であるといえる．

その一方で， 評価 (1.3) は既存の結果より比較的容易に導くことができる．実際，$\omega_+:=\max_{s\in[0,L]}|\omega(s)|$ と置き，$L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の 2 次形式 $\mathcal{E}_\beta^\pm$ を

$$\mathcal{E}_\beta^\pm[\psi]=\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}-(\beta\mp\omega_+)\int_0^L|\psi(\Gamma(s))|^2\,ds,\qquad Q(\mathcal{E}_\beta^\pm)=H^1(\mathbb{R}^2)$$

で定め，$\mathcal{E}_\beta^\pm$ に対応する自己共役作用素の負の固有値の総数を $N^\pm(\beta)$ で表す．$\mathcal{E}_\beta^-[\psi]\le q_{\omega,\beta}[\psi]\le\mathcal{E}_\beta^+[\psi]$ より $N^+(\beta)\le N(\beta)\le N^-(\beta)$ が成り立つ．[3, Theorem 2] より

$$\begin{aligned}N^\pm(\beta)&=\frac{L}{2\pi}(\beta\mp\omega_+)+\mathcal{O}(\log(\beta\mp\omega_+))\\&=\frac{L\beta}{2\pi}+\mathcal{O}(\log\beta)\end{aligned}$$

であるから，(1.3) が成り立つ．

ここで，「ω が非有界の場合に (1.3) と同様の評価が成立するか？」という疑問が自然に生じる．これが本研究の問題意識である．本研究の主結果 Theorem1.1 はこの問いに対して肯定的な答えを与えている．

ここで，Theorem 1.1 の証明の概略について述べる．Theorem 1.1 の証明は既存の方法 [3] に加えて Sobolev の埋蔵定理及び Sobolev 空間のトレース定理と，[3] では用いられていない繊細な議論 (特に Lemma 3.2) を組み合わせる．Lemma 3.2 が必要になるのは，L_β^- の $C_{\varepsilon,d}$ より小さい固有値の個数 (3.2 参照) を評価する必要があるからである (論文 [3] では [3] の $L_{a,\beta}^-$ の負の固有値の個数を評価すれば十分であったので，[3] の $T_{a,\beta}^-$ の正の固有値について考慮する必要はなかった)．

最後に，本論文の構成について述べる．第 2 章で Sobolev の埋蔵定理と Sobolev のトレース定理を組み合わせて得られる基本的な評価 (2.1) を導き，$N(\beta)/\beta$ の下からの評価を行う．第 3 章では主に Dirichlet-Neumann bracketing を用いた既存の方法によって評価 (3.7) を導き，その上で鍵となる Lemma 3.2 を証明する．第 4 章では第 2 章と第 3 章で得られた結果を統合することにより主結果の証明を完成させる．第 5 章において今後の展望について述べる．付録 (第 6 章) において，離散スペクトルと本質スペクトルの定義と，スペクトルについて有用な定理 (Weyl's Criterion)，および $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) = [0,\infty)$ の証明について述べる．

2　基本的な評価

2.1　$\omega(s)$ を含む項の評価

まず，Hölder の不等式より q を p の共役指数 $(1/p + 1/q = 1)$ とすると

$$\begin{aligned}\left| \int_0^L \omega(s)|f(\Gamma(s))|^2 \, ds \right| &\le \|\omega\|_{L^p((0,L))} \left(\int_\Gamma |f(\Gamma(s))|^{2q} \, ds \right)^{1/q} \\ &= \|\omega\|_{L^p((0,L))} \|f|_\Gamma\|_{L^{2q}(\Gamma)}^2 .\end{aligned}$$

ここで Sobolev の埋蔵定理および Sobolev 空間におけるトレース定理 ([7, Theorem 7.9]) より

$$\begin{aligned}\|f|_\Gamma\|_{L^{2q}(\Gamma)}^2 &\le C\|f|_\Gamma\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\le C'\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2\end{aligned}$$

なる $C,\ C'>0$ と $1/2<s<1$ が存在する．更に，

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2=\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi$$

であるが (ただし $\hat{f}$ は f のフーリエ変換を表す)，ε を任意の正数として，Young の不等式より $(1+|\xi|^2)^s\le\varepsilon(1+|\xi|^2)+\varepsilon^{-s/(1-s)}$ となるから，

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2&\le\int_{\mathbb{R}^2}\{\varepsilon(1+|\xi|^2)+\varepsilon^{-s/(1-s)}\}|\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi\\&=\varepsilon\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+(\varepsilon+\varepsilon^{-s/(1-s)})\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\end{aligned}$$

となり，まとめると

$$\left|\int_0^L\omega(s)|f(\Gamma(s))|^2\ ds\right|\le C'\varepsilon\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+C'(\varepsilon+\varepsilon^{-s/(1-s)})\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \tag{2.1}$$

と評価できる．

2.2 $N(\beta)$ の下からの評価

(2.1) より，

$$C_\varepsilon:=C'(\varepsilon+\varepsilon^{-s/(1-s)}) \tag{2.2}$$

として

$$q_{\omega,\beta}[f]\le(1+C'\varepsilon)\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2-\beta\int_0^L|f(\Gamma(s))|^2\ ds+C_\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

と書ける．上式の右辺を $q_\beta^+[f]$ とし，$q_\beta^+[f]$ に対応する自己共役作用素を H_β^+ と定める．H_β^+ の負の固有値の個数を $N^+(\beta)$ とすると $\sigma_{\mathrm{ess}(H_\beta^+)}=[C_\varepsilon,\infty)$ なので，ミニマックス原理 ([8, Theorem XIII.1]) を用いることで $N^+(\beta)\le N(\beta)$ と評価できる．しかし $N^+(\beta)$ は $H_{0,\beta/(1+C'\varepsilon)}$ の $-C_\varepsilon/(1+C'\varepsilon)$ 以下の固有値の個数だから，[3] と同様の方法により

$$\liminf_{\beta\to\infty}\frac{N(\beta)}{\beta}\ge\liminf_{\beta\to\infty}\frac{N^+(\beta)}{\beta}=\frac{L}{2\pi(1+C'\varepsilon)}.$$

$\varepsilon>0$ は任意であり，最左辺は ε に寄らないので，$\varepsilon\to0$ とすれば $\liminf_{\beta\to\infty}N(\beta)/\beta\ge L/(2\pi)$ を得る．

$N(\beta)$ の上からの評価については，上記と同様にはできない．実際，(2.1) を用いて

$$q_{\omega,\beta}[f] \geq (1-C'\varepsilon)\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \beta\int_0^L |f(\Gamma(s)|^2 ds - C_\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

とし，上式の右辺を $q_\beta^-[f]$ と定め，これに対応する自己共役作用素を H_β^- としてみる．しかし $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\beta^-) = [-C_\varepsilon, \infty)$ であるため，ミニマックス原理による評価は同様にはできない．従って一部 [3] の方法に従い，曲線の近傍における評価をしていく．

3　$N(\beta)$ の評価のための準備

3.1　帯状領域での評価

$d>0$ として，写像 $\Phi_d : [0,L]\times[-d,d] \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi_d(s,u) := (\Gamma_1(s) - u\Gamma_2'(s),\ \Gamma_2(s) + u\Gamma_1'(s))$$

で定める．このとき，$\gamma_+ := \max_{[0,L]} |\gamma(s)|$ として d を $0 < d < 1/2\gamma_+$ となるように取れば Φ_d が単射となる ([3, Lemma2.1])．Φ_d による $[0,L]\times[-d,d]$ の像を Ω_d で表すことにする．この Ω_d により，$H_{\omega,\beta}$ に対して Dirichlet-Neumann Bracketing ([8]) を適用すれば,

$$H_{\omega,\beta} \geq L_{\omega,\beta} \oplus (-\Delta^N_{\Omega_d^c}) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\Omega_d) \oplus L^2(\Omega_d^c) \tag{3.1}$$

となる．ただし $L_{\omega,\beta}$ は $L^2(\Omega_d)$ 上の 2 次形式

$$\ell_{\omega,\beta}[f] := \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_d)} - \int_0^L (\beta + \omega(s))|f(\Gamma(s))|^2\ ds, \quad Q(\ell_{\omega,\beta}) = H^1(\Omega_d)$$

に対応する自己共役作用素であり，Ω_d^c は $\mathbb{R}^2$ における Ω_d の補集合を表し，$-\Delta^N_{\Omega_d^c}$ は Ω_d^c 上の Neumann Laplacian を表す．Ω_d は有界なので $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{\omega,\beta}) = \emptyset$ であり，一方で $\sigma(-\Delta^N_{\Omega_d^c}) = [0,\ \infty)$ なので，(3.1) の負の固有値は $L_{\omega,\beta}$ のそれで与えられる．

ここで，$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ で以下を満たすものを取る：

$$\begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1, \\ \Gamma\text{のある近傍において}\chi = 1, \\ \mathrm{supp}\ \chi \subset \Omega_d. \end{cases}$$

(2.1) においてこの χ を用いれば，$f \in H^1(\Omega_d)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^L \omega(s)|f(\Gamma(s)|^2 \, ds \right| &= \left| \int_0^L \omega(s)|(\chi(\Gamma(s))f(\Gamma(s))|^2 \, ds \right| \\
&\leq C'\varepsilon \|\nabla(\chi f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_\varepsilon \|\chi f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= C'\varepsilon \|(\nabla\chi)f + \chi(\nabla f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega_d)} \\
&\leq 2C'\varepsilon \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_d)} + \left(2C'\varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\nabla\chi(x)|^2 + C_\varepsilon \right) \|f\|^2_{L^2(\Omega_d)}
\end{aligned}
$$

と，Ω_d 上の評価に書き直せる．これにより

$$
C_{\varepsilon,d} := 2C'\varepsilon + \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\nabla\chi(x)|^2 + C_\varepsilon \tag{3.2}
$$

とすれば,

$$
\ell_{\omega,\beta}[f] \geq (1-2C'\varepsilon)\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_d)} - \beta \int_0^L |f(\Gamma(s))|^2 ds - C_{\varepsilon,d}\|f\|^2_{L^2(\Omega,d)} \tag{3.3}
$$

となるので，$L^2(\Omega_d)$ 上の 2 次形式

$$
\ell^-_\beta[f] := \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_d)} - \frac{\beta}{1-2C'\varepsilon} \int_0^L |f(\Gamma(s))|^2 \, ds, \quad Q(\ell^-_\beta) := H^1(\Omega_d) \tag{3.4}
$$

に対応する自己共役作用素 L^-_β の

$$
C'_{\varepsilon,d} := C_{\varepsilon,d}/(1-2C'\varepsilon) \tag{3.5}
$$

より小さい固有値の個数を $N_-(\beta)$ で表せば

$$
N(\beta) \leq N_-(\beta) \tag{3.6}
$$

が成り立つ．従ってこの $N_-(\beta)$ を評価したい．

3.2 $\ell^-_\beta[f]$ のユニタリ変換

次に，[3] の手法に倣って $\ell^-_\beta[f]$ を縦の成分と横の成分に分解する．$U_d : L^2(\Omega_d) \to L^2((0,L)\times(-d,d))$ を

$$
(U_d f)(s,u) := (1+u\gamma(s))^{1/2} f(\Phi_d(s,u))
$$

で定めると，Φ_d が単射であることから U_d は $L^2(\Omega_d)$ から $L^2((0,L)\times(-d,d))$ へのユニタリ変換となっている．これを用いると

$$\begin{aligned}\ell_\beta^-[U_d f] = &\int_0^L\int_{-d}^d (1+u\gamma(s))^{-2}|\partial_s f|^2\ duds - \int_0^L\int_{-d}^d |\partial_u f|^2\ duds\\ &+\int_0^L\int_{-d}^d V(s,u)|f|^2\ duds - \frac{\beta}{1-2C'\varepsilon}\int_0^L |f(s,0)|^2\ ds\\ &-\frac{1}{2}\int_0^L \frac{\gamma(s)}{1+d\gamma(s)}|f(s,d)|^2\ ds + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\gamma(s)}{1-d\gamma(s)}|f(s,-d)|^2\ ds\end{aligned}$$

と表される．ただし

$$V(s,u) := \frac{1}{2}(1+u\gamma(s))^{-3}u\gamma''(s) - \frac{5}{4}(1+u\gamma(s))^{-4}u^2\gamma'(s)^2 - \frac{1}{4}(1+u\gamma(s))^{-2}\gamma(s)^2.$$

d_0 を $0 < d_0 < 1/(2\gamma_+)$ をみたすように選び，$m := \min_{[0,L]\times[-d_0,d_0]} V(s,u)$ とおく．$0 < d < d_0$ に対し，

$$\begin{aligned}\ell_\beta^-[U_d f] \geq &(1+d\gamma_+)^{-2}\int_0^L\int_{-d}^d |\partial_s f|^2\ duds + \int_0^L\int_{-d}^d |\partial_u f|^2\ duds\\ &+m\int_0^L\int_{-d}^d |f|^2\ duds - \frac{\beta}{1-2C'\varepsilon}\int_0^L |f(s,0)|^2\ ds\\ &-\gamma_+\int_0^L (|f(s,d)|^2 + |f(s,-d)|^2)\ ds\end{aligned}$$

と評価できる．

$$\begin{aligned}&t^-[f] := \int_{-d}^d |f'(u)|^2\ du - \beta|f(0)|^2 - \gamma_+(|f(d)|^2 + |f(-d)|^2),\\ &Q(t^-) := H^1((-d,d))\end{aligned}$$

に対応する自己共役作用素を $T_{d,\beta}$ とし，

$$\begin{aligned}&W_d^- := -(1+d\gamma_+)^{-2}\frac{d^2}{ds^2}\\ &D(W_d^-) = \{f \in H^2((0,L))\ :\ f(0) = f(L),\ f'(0) = f'(L)\}\end{aligned}$$

と定めれば，

$$U_d^* L_\beta^- U_d \geq W_d^- \otimes 1 + 1 \otimes T_{d,\beta/(1-2C'\varepsilon)} + mI \tag{3.7}$$

を得る．以下，W_d^-，$T_{d,\beta}$ および $T_{d,\beta/(1-2C'\varepsilon)}$ の j 番目の固有値をそれぞれ μ_j，ζ_j，$\tilde{\zeta}_j$ としておく．このとき

$$N_-(\beta) \leq \#\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;:\; \mu_j + \tilde{\zeta}_k < C'_{\varepsilon,d} - m\} \tag{3.8}$$

となる．

Remark 3.1. μ_j については固有方程式を具体的に解くことができて

$$\mu_j = 4(1 + d\gamma_+)^{-2} \left[\frac{j}{2}\right]^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \tag{3.9}$$

が得られる．また ζ_j については，ある定数 $K > 0$ が存在して $d\beta > \log 4$ なる全ての $d \in (0, d_0)$ と $\beta > 0$ に対して

$$-\frac{\beta^2}{4} - K\beta^2 \exp(-d\beta) < \zeta_1 < -\frac{\beta^2}{4} \tag{3.10}$$

が成り立つ (cf. [3, Proposition 2.5])．また，$j \geq 2$ に対して $\zeta_j > 0$ である．

3.3　$T_{d,\beta}$ の正の固有値の個数

$N_-(\beta)$ の評価をするために次の補題を用いる．

Lemma 3.2. $M > 0$ を固定すると，十分大きな $\beta > 0$ に対し

$$\#\{\sigma_{\mathrm{d}}(T_{d,\beta}) \cap (0, M)\} \leq 2\left(1 + \left[\frac{dM}{\pi}\right]\right) \tag{3.11}$$

が成り立つ．

Proof. $k > 0$ とする．k^2 が $T_{d,\beta}$ の固有値であることは次のどちらかの方程式の解となることと同値である ([3, Proposition 3.2] の (3.4)，(3.5) 式を参照)：

$$\tan kd = \frac{k}{\gamma_+}, \tag{3.12}$$

$$\tan kd = \frac{\beta + 2k\gamma_+}{\beta\gamma_+ - k^2}\beta. \tag{3.13}$$

(3.12) については，$(0, \pi/d)$ においてこれを満たす k が唯一つ存在することが直ちにわかる．

次に (3.13) について考える．右辺を $g_\beta(k)$ とすると，$g_\beta(k) > \beta/\gamma_+$ であることに注意しておく．$k_0 := d^{-1}(\pi/2 - \pi\gamma_+/(2\beta))$ とすると，$0 < k \le k_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\tan kd &\le \tan k_0 d \\
&= \frac{1}{\tan(\frac{\pi\gamma_+}{2\beta})} \\
&\le \frac{1}{\sin(\frac{\pi\gamma_+}{2\beta})} \\
&< \frac{1}{\frac{2}{\pi}(\frac{\pi\gamma_+}{2\beta})} = \frac{\beta}{\gamma_+} < g_\beta(k_0)
\end{aligned}$$

であり，$k \ge k_0$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\tan kd)' = \frac{d}{\cos^2 kd} &\ge \frac{d}{\cos k_0 d} \\
&= \frac{d}{\sin^2(\frac{\pi\gamma_+}{2\beta})} \\
&\ge d\left(\frac{2\beta}{\pi\gamma_+}\right)^2.
\end{aligned}$$

一方で，$0 < k \le M$ に対し，

$$g'_\beta(k) = \frac{4\gamma_+ k^2 + 4\beta k + 2\beta\gamma_+^2}{(\beta\gamma_+ - 2k^2)^2}\beta \le \frac{4\gamma_+ M^2 + 4\beta M + 2\beta\gamma_+^2}{(\beta\gamma_+ - 2M^2)^2}\beta = \mathcal{O}(1) \quad \text{as} \quad \beta \to \infty$$

となるから，β が十分大きいとき $(\tan kd)' > g'_\beta(k)$ $(k \ge k_0)$ となる．また，$(\pi/(2d), \pi/d)$ においては $\tan kd < 0 < g_\beta(k)$ である．従って $(0, \pi/d)$ において (3.13) を満たす k は唯一つである．$\tan kd$ の周期性より，$(m\pi/d, (m+1)\pi/d)$ $(m \in \mathbb{N})$ においても同様にできる．$M < \pi\ell/d$ なる最小の整数 ℓ は $\ell = [1 + dM/\pi]$ であるから，(3.11) が得られる． □

4　主結果の証明

(3.6) および (3.8) より，

$$\begin{aligned}
N(\beta) &\le N_-(\beta) \\
&\le \#\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ \mu_j + \tilde{\zeta}_k < C'_{\varepsilon,d} - m\} \\
&= \#\{(j \in \mathbb{N} \ : \ \mu_j + \tilde{\zeta}_1 < C'_{\varepsilon,d} - m\} \\
&\quad + \#\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ k \ge 2, \ \mu_j + \tilde{\zeta}_k < C'_{\varepsilon,d} - m\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) の右辺第一項については，Remark 3.1 より $\tilde{\beta} := \beta/(1-2C'\varepsilon)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&\{j \in \mathbb{N} \ :\ \mu_j + \tilde{\zeta}_1 < C'_{\varepsilon,d} - m\} \\
&= \left\{ j \in \mathbb{N} \ :\ 4(1+d\gamma_+)^{-2} \left[\frac{j}{2}\right]^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \tilde{\zeta}_1 < C'_{\varepsilon,d} - m \right\} \\
&\subset \left\{ j \in \mathbb{N} \ :\ 4(1+d\gamma_+)^{-2} \left[\frac{j}{2}\right]^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \frac{\tilde{\beta}^2}{4} - K\tilde{\beta}^2 \exp(-d\tilde{\beta}) + C'_{\varepsilon,d} - m \right\} \\
&= \left\{ j \in \mathbb{N} \ :\ \left[\frac{j}{2}\right] < \left(\frac{L}{2\pi}\right)(1+d\gamma_+) \left(\frac{\tilde{\beta}^2}{4} + K\tilde{\beta}^2 \exp(-d\tilde{\beta}) + C'_{\varepsilon,d} - m\right)^{1/2} \right\} \\
&\subset \left\{ j \in \mathbb{N} \ :\ \left[\frac{j}{2}\right] < \left(\frac{L}{2\pi}\right)(1+d\gamma_+) \left(\frac{\tilde{\beta}}{2} + (K\tilde{\beta}^2 \exp(-d\tilde{\beta}) + C'_{\varepsilon,d} - m)^{1/2}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

となり，$(K\tilde{\beta}^2 \exp(-d\tilde{\beta}) + C'_{\varepsilon,d} - m)^{1/2} = o(\beta)$ なので，上式最右辺の集合の濃度は

$$
\frac{L\beta}{2\pi} \cdot \frac{1+d\gamma_+}{1-2C'\varepsilon} + o(\beta)
$$

と表される．(4.1) の右辺第二項については，(3.11) より

$$
\begin{aligned}
&\#\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ :\ k \geq 2,\ \mu_j + \tilde{\zeta}_k < C'_{\varepsilon,d} - m\} \\
&\leq \#\{j \in \mathbb{N} \ :\ \mu_j < C'_{\varepsilon,d} - m\} \#\{k \geq 2 \ :\ \tilde{\zeta}_k < C'_{\varepsilon,d} - m\} \\
&\leq 2\left(1 + \left[\frac{d(C'_{\varepsilon,d} - m)}{\pi}\right]\right) \#\{j \in \mathbb{N} \ :\ \mu_j < C_{\varepsilon,d} - m\}
\end{aligned}
$$

と評価でき，右辺は β によらず有限である．従ってこれらより

$$
\limsup_{\beta \to \infty} \frac{N(\beta)}{\beta} \leq \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{1+d\gamma_+}{1-2C'\varepsilon}. \tag{4.2}
$$

左辺は d, ε によらないので，$d \to 0$，$\varepsilon \to 0$ とすれば

$$
\limsup_{\beta \to \infty} \frac{N(\beta)}{\beta} \leq \frac{L}{2\pi}
$$

を得る．これと §2.2 で述べたことにより $\lim_{\beta \to \infty} N(\beta)/\beta = L/2\pi$ がわかり，Theorem 1.1 が得られる． □

5 今後の展望

本論文では $-\Delta + (\beta + \omega(\cdot))\delta(\cdot - \Gamma)$ の固有値の漸近分布についての考察であったが，ω にカップリングをかけたものについても考えたい．具体的には，ψ を $\psi(\beta) = o(\beta)$ な

るある関数として

$$
\begin{aligned}
&a_{\omega,\beta}[f] := ||\nabla f||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \int_0^L (\beta + \psi(\beta)\omega(s))|f(\Gamma(s))|^2 \, ds, \\
&Q(a_{\omega,\beta}) = H^1(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}
$$

の形の $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の 2 次形式に対応する自己共役作用素の固有値の漸近分布についてである．Γ 上の積分についての評価や Dirichlet-Neumann Bracketing の適用，ユニタリ変換までの議論はほぼ同様に進めることができるが, $T_{d,\beta}$ の正の固有値の個数を見るときにやや問題が生じる．具体的には ε, d といったパラメータを単に 0 に近づけるだけでは不具合が生じるため，[3] や [6] で用いられたように，パラメータを β に依存させてより精密に議論をする必要が出てくる．この点を改良していくことが今後の課題となってくるだろう．

6　付録

本論文中で扱っているスペクトルについての基本的な事項と，本文中では省略した本質スペクトルについての命題をまとめておく．

6.1　離散スペクトルと本質スペクトル

ここでは作用素のスペクトルについて定義し, Proposition 6.4 の証明でも用いる Weyl's Criterion についても記しておく．

Definition 6.1. ([5, Definition 1.1, Definition 1.4]) A を Banach 空間 X 上の線形作用素とする．

(1)　A のスペクトル $\sigma(A)$ とは，$A - \lambda I$ が可逆であるような $\lambda \in \mathbb{C}$ の全体である．

(2)　$\lambda \in \sigma(A)$ が，$\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ を満たすとき，λ を A の固有値と呼ぶ．

(3)　A の離散スペクトル $\sigma_{\mathrm{d}}(A)$ とは，有限の (代数的) 重複度を持つ A の固有値のうち，$\sigma(A)$ の孤立点であるようなものの全体のことをいう．

(4)　A の本質スペクトル $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ を，$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{d}}(A)$ で定める．

Remark 6.2. 実は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A については $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ となることがわかる．

Theorem 6.3. [5, Theorem 5.10] A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して次は同値である：

(i) $\lambda \in \sigma(A)$.

(ii) ある $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ が存在して，次を満たす：
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|u_n\| = 1$ が成り立つ．
- $\|(A-\lambda)u_n\| \to 0$ (as $n \to \infty$) が成り立つ．

6.2 $H_{\omega,\beta}$ の本質スペクトルについて

第 1 章で省略していた次の命題についてここで証明を与える．

Proposition 6.4. $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) = [0,\infty)$ が成り立つ．

Proof. まず，(3.1) より

$$\begin{aligned}\inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) &\geq \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(L_{\omega,\beta} \oplus (-\Delta^N_{\Omega_d^c})) \\ &= \inf \left\{\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{\omega,\beta}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta^N_{\Omega_d^c})\right\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

$\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{\omega,\beta}) = \emptyset$ であり，$\sigma(-\Delta^N_{\Omega_d^c}) = [0,\infty)$ なので，(6.1) の最右辺は 0 となる．従って $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) \subset [0,\infty)$ が得られる．

次に，$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta}) \supset [0,\infty)$ を示す．そのため，$0 < \lambda < \infty$ なる λ を任意に取っておく．Γ はコンパクトだから，$\Gamma \subset (-L,L)^2$ なる $L \in \mathbb{N}$ が存在する．$n+3 \leq m$ なる整数 n,m に対し，$\chi_{n,m} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ を以下で定める．

$\chi_0, \chi_1 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned}\chi_0(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad \chi_0(x) = 1 \quad (x \geq 1) \\ \chi_1(x) = 1 \quad (x \leq 0), \quad \chi_1(x) = 0 \quad (x \geq 1)\end{aligned}$$

をみたすように選び，

$$\chi_{n,m}(x) = \begin{cases} \chi_0(x-n), & (x \leq n+1) \\ 1, & (n+1 < x < m-1) \\ \chi_1(x-m+1) & (m-1 \leq x) \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$S := \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_0'(x)|,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_1'(x)|,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_0''(x)|,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_1''(x)|\right\}$$

とすれば，$\chi'_{n,m}(x)$ および $\chi''_{n,m}(x)$ は S で上から押さえられる．

関数列 $\{\psi_n\}_{n=3}^{\infty}$ を

$$\psi_n(x) = \frac{\chi_{L,L+n}(x)\chi_{L,L+n}(y)e^{i\sqrt{\lambda}x}}{\|\chi_{L,L+n}(x)\chi_{L,L+n}(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}$$

で定めると，$\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$ である．また，$\Gamma \subset (-L, L)^2$ より $\psi_n \in D(H_{\omega,\beta})$ である．

上で注意したことから，

$$\begin{aligned}
&\|(H_{\omega,\beta} - \lambda I)\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
= \ &\frac{1}{\|\chi_{L,L+n}(x)\chi_{L,L+n}(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \\
&\times \left\|\chi''_{L,L+n}(x)\chi_{L,L+n}(y)e^{i\sqrt{\lambda}x} + 2i\sqrt{\lambda}\chi'_{L,L+n}(x)\chi_{L,L+n}(y)e^{i\sqrt{\lambda}x}\right. \\
&\left. +\chi_{L,L+n}(x)\chi''_{L,L+n}(y)e^{i\sqrt{\lambda}x}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
\leq \ &\frac{1}{n-2}(\sqrt{2n}S + 2\sqrt{2\lambda n}S + \sqrt{2n}S) \\
\to \ &0 \quad (\text{as} \quad n \to \infty).
\end{aligned}$$

よって，Weyl's Criterion(Theorem 6.3) より $\lambda \in \sigma(H_{H_{\omega,\beta}})$．$0 \leq \lambda < \infty$ なる λ は任意だったから $[0, \infty) \subset \sigma(H_{\omega,\beta})$．集合 $[0, \infty)$ は孤立点を持たないから $[0, \infty) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\omega,\beta})$．以上より，結論を得る． □

参考文献

[1] J. Blank, P. Exner, and M.Havlíček, Hilbert space operators in quantum physics, 2nd Ed, Springer, Heidelberg (2008).

[2] J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, and P. Šeba, Schrödinger operators with singular interations, J. Math. Anal. Appl. **184** (1994), 112-139.

[3] P. Exner and K. Yoshitomi, Asymptotics of eigenvalues of the Schrödinger operator with a strong δ-interaction on a loop, J. Geom. Phys. **35** (2002), 344-358.

[4] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, second edition, Grad. Texts in Math., vol. 250, Springer, New York (2009).

[5] P. D. Hislop, I. M. Sigal, Introduction to spectral theory - with applications to Schrödinger operators

[6] S. Kondej, Schrödinger operator with a strong varying interaction on a curve in $\mathbb{R}^2$, J. Math. Phys. **54** (2013), 093511.

[7] J. L. Lions and E. Magenes, Non-homogeneous boundary value problems and applications I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

[8] M. Reed and B. Simon, Methods of modern Mathematical physics: IV. Analysis of operators, Academic Press, New York (1978).